Technická univerzita v Liberci fakulta strojní

Základy řízení energetických strojů
část 2.

Petr Novotný

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

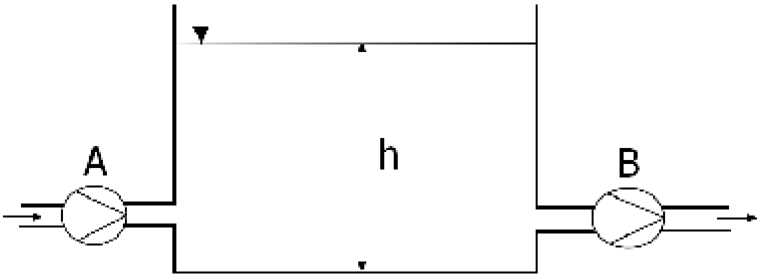
Obsah

2.1. Klasifikace regulovaných soustav 4
Příklad nádrže: 5
2.2. Statická soustava 6
2.3. Astatická soustava 7
2.4. Klasifikace regulačních soustav podle matematického popisu 9
Příklad: Závislost dráhy na čase 9
2.5. Popis regulované soustavy diferenciální rovnicí 12
Lineární a nelineární regulované soustavy 13
2.5.1. Soustavy nultého řádu 14
2.5.2. Přechodová charakteristika 15
2.5.3. Soustavy prvního řádu – statické 16
Příklad průtočné nádrže 19
Příklad elektrické soustavy 20
Zobecnění 21
2.5.4. Astatické soustavy I řádu 21
2.5.5. Soustavy druhého řádu 22
Příklady soustav druhého řádu 25
2.5.6. Astatické soustavy druhého řádu 29
2.5.7. Soustavy vyšších řádů 30
2.5.8. Literatura 32

2.1. Klasifikace regulovaných soustav

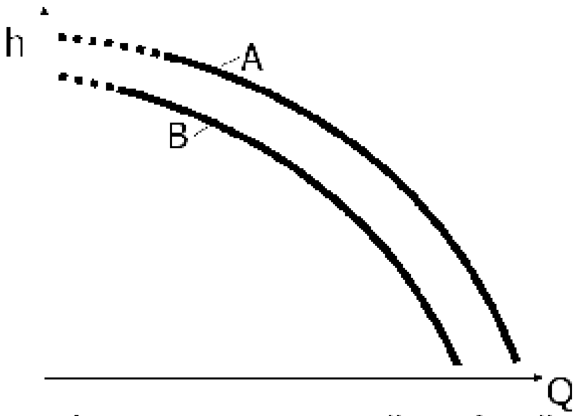
Soustavy, které máme řídit, je potřeba analyzovat (zjišťovat jejich vlastnosti). Abychom tyto vlastnosti mohli porovnávat, analyzujeme jejich chování pomocí normalizovaných vstupních signálů, nebo signálů, které je možné do normalizovaných signálů přepočítat. K takovým signálům patří například skoková funkce, harmonická funkce, impulz a další. Skokovou funkci je možné si představit jako například zapnutí topné elektrické spirály v zásobníku vody při zjednodušené představě, že výkon spirály je konstantní a nemění se, nebo zapálení hořáku u plynové pece a výkon hořáku se nemění. Harmonická funkce (může ji představovat například zjednodušeně funkce sinus nebo cosinus) se vytváří speciálním zařízením - oscilátory. Na výstupu se sleduje změna amplitudy, frekvence a posunu funkce. Představa impulzu je nejkomplikovanější, protože impulz je matematicky definován jako nekonečně velký signál v nekonečně krátkém čase. Mechanicky, elektricky, pneumaticky ani hydraulicky nelze takový signál vytvořit, protože jsme omezeni technickými možnostmi, vlastnostmi materiálů. Taktéž při simulacích na počítači lze pracovat s danou funkcí omezeně. Jedině teoreticky v matematice lze při známém matematickém popisu soustavy, je možné pracovat s danou funkcí, řešit rovnici, její chování v čase. Podle reakce na změnu vstupní veličiny zásadě rozdělujeme regulované soustavy na **statické** a **astatické.** Statickou regulovanou soustavu považujeme takovou soustavu, u niž po změně vstupní (akční) veličiny o konečnou hodnotu přejde regulovaná soustava do nového konečného ustáleného stavu. Například máme v peci dva hořáky. V provozu je první hořák a pec je v ustáleném režimu, má konstantní teplotu. Zapálíme druhý hořák a v peci se postupně zvýší a ustálí nová vyšší teplota po určitém čase. Astatickou regulovanou soustavou rozumíme soustavu, u níž po změně vstupní veličiny (teoreticky o sebemenší hodnotu) regulovaná veličina trvale stoupá, nebo klesá, až dosáhne krajní hranice, která je dána konstrukcí zařízení. Příklad může reprezentovat elektrická pec mající dvě topné spirály velmi velkého výkonu. Pokud je v provozu jedna spirála je teplota na konstantní přiměřené hodnotě. Při zapnutí obou spirál stoupne teplota na tak velké hodnoty až se elektrický obvod přeruší (roztaví se topná tělesa).

Příklad nádrže:



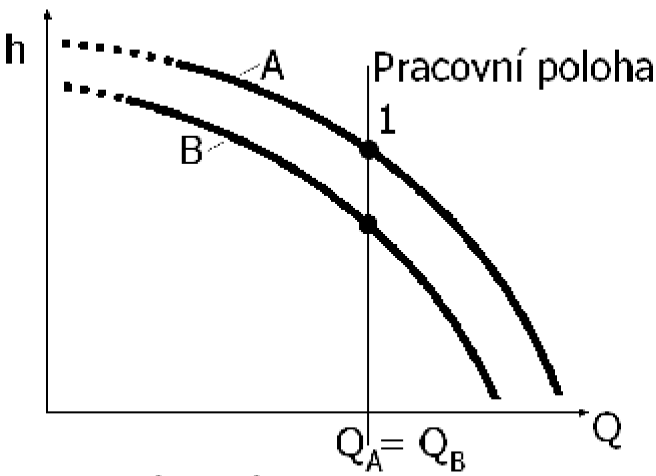
Vyrovnávací nádrž s odstředivými čerpadly

Do nádrže je odstředivým čerpadlem A je vháněna tekutina o konstantní hustotě a z nádrže je čerpadlem B odváděna do technologie. Pracovní charakteristika čerpadel je



Pracovní charaktristika odstředivých čerpadel

popsána výtlačnou výškou „h“ (rozměr v metrech) nebo výtlačným tlakem „p“ (rozměr bar) a množstvím dodávané tekutiny „*Q*“(rozměr m^3hod^{-1}). Množství „*Q*“ dodávané tekutiny je závislé na výtlačné výšce, kterou musí čerpadlo překonat. S klesající

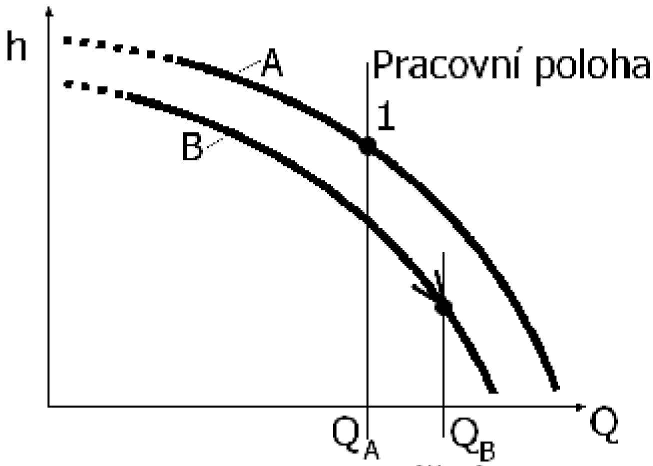


Výchozí stav soustavy

výtlačnou výškou stoupá dodávané množství tekutiny. Podle obrázku čerpadlo „B“ má menší výtlačnou výšku a dodává z konstrukčních důvodů i menší množství než čerpadlo „A“. Regulovanou veličinou je výška tekutiny v nádrži „h“.

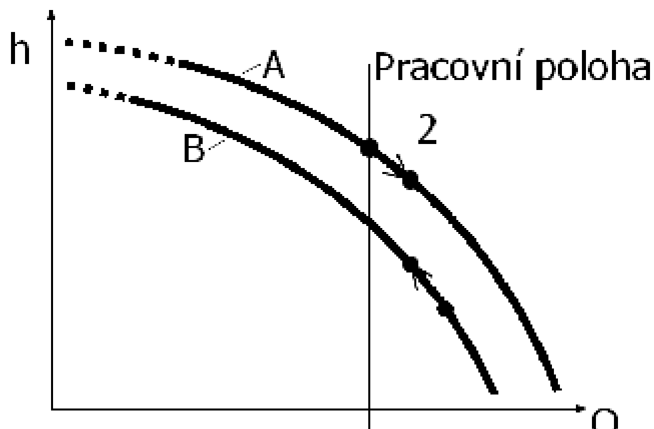
2.2. Statická soustava

Jestliže z nějakých příčin se sníží odpor ve výtlačném potrubí čerpadla „B“, nebo se jeho otáčky zvýší, začne odebírat z vyrovnávací nádrže větší množství a hladina „h“



Porucha nerovnovážný stav

v nádrži začne klesat. Tato vnější příčina je poruchou působící na soustavu. Pokud před touto změnou byla hladina na konstantní výšce, pak každé čerpadlo dodávalo stejné množství, ale překovávalo jinou výtlačnou výšku. Porucha kdy čerpadlo „B“ překonává



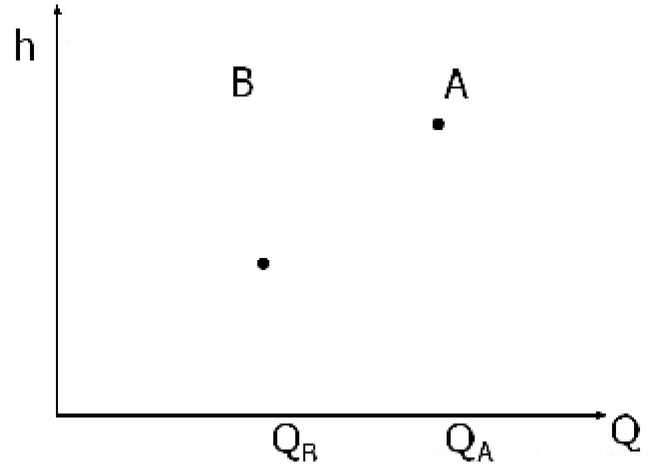
Nový rovnovážný stav

menší výtlačnou výšku se projeví na poklesu výšky hladiny ve vyrovnávací nádrži a tím ke snížení výtlačné výšky u čerpadla „A“ a zároveň ke snížení tlaku na sání u čerpadla „B“.

Čerpadlo „A“ začne dodávat větší množství a čerpadlo „B“ s poklesem hladiny odebírané množství z nádrže snižuje. Pracovní body obou čerpadel se k sobě posouvají do nové pracovní polohy „2“. Pokles hladiny se zastaví a opět platí že $Q_A = Q_B$. Ustálení hladiny nastalo proto, že při jejím snižování se zmenšoval odtok a zvětšoval se přítok. Změna regulované veličiny (výšky hladiny v nádrži) vyvolá z podstaty použitých zařízení účinek působící proti poruše. Soustava má schopnost se sama udržovat v určitém rozmezí v rovnováze. To je **autoregulace** (vlastní regulace), **statická soustava**.

2.3. Astatická soustava

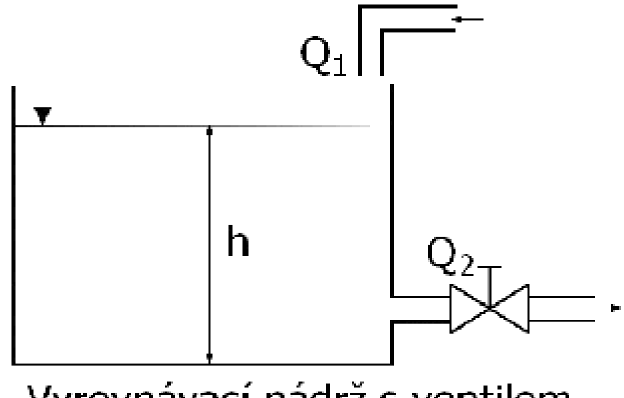
Změňme konstrukci soustavy a místo odstředivých čerpadel použijeme čerpadla



Charakteristika pístových čerpadel

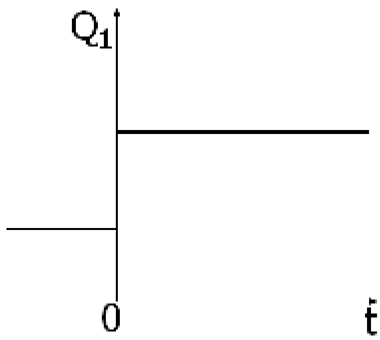
pístová. U těchto čerpadel nemá tlaková diference mezi sáním a výtlakem prakticky žádný vliv na dodávané množství. To závisí pouze na otáčkách. Pokud čerpadla pracují s různým množstvím při konstantních otáčkách $Q_A > Q_B$ nemůže nastat rovnováha, dokud se vnějším zásahem nezmění například otáčky čerpadla, nebo se vymění za dvě stejná čerpadla tak aby $Q_A = Q_B$. Nový ustálený stav bez této úpravy nenastane, soustava je **astatická** (je bez autoregulace).

Jiný příklad nádrže s ventilem na odtoku. Do zásobníku tekutiny přitéká určité

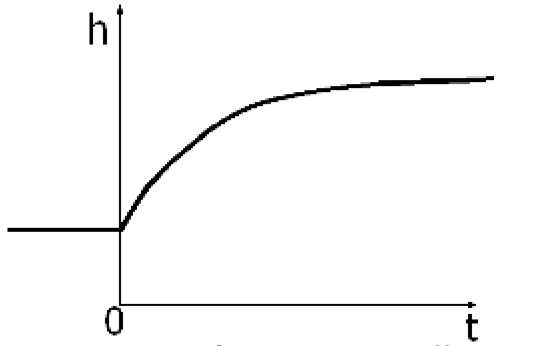


Vyrovnávací nádrž s ventilem

množství „Q_1“. Přitékající množství se může měnit v závislosti na tlaku v potrubí. Z nádrže vytéká množství „Q_2“, které závisí na zdvihu ventilu „z“ a na výšce hladiny „h“. Předpokládáme, že se nemění teplota ani hustota tekutiny, pak vytékající množství je $Q_2 = Kz\sqrt{h}$, kde K je konstanta. Dojde-li k náhlé změně na přítoku „Q_1“ tato změna se projeví

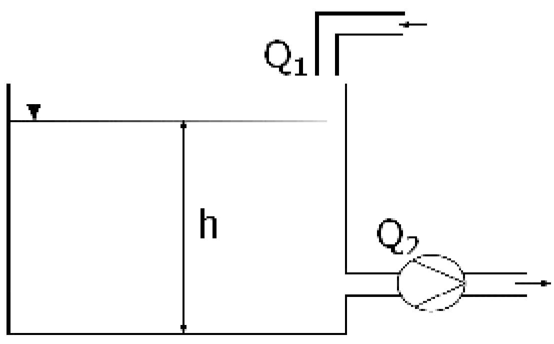


Skoková změna přítoku v čase



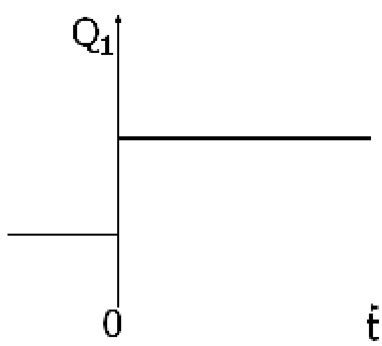
Statická soustava v čase t

zvýšením hladiny v nádrži. Při zvýšení hladiny v nádrži se zvýší i odtok tekutiny až do vyrovnání přítoku a odtoku, což představuje novou rovnovážnou polohu. Je zřejmé, že soustava takto pracuje v určitých mezích. Pokud „Q_1“ přesáhne možnosti průtoku na výstupním ventilu „Q_2“ k rovnovážnému stavu nedojde. Předpokládáme tedy, že maximální hodnota při plném zdvihu ventilu je $Q_{1\max} \leq Q_2$, pak je soustava statická.

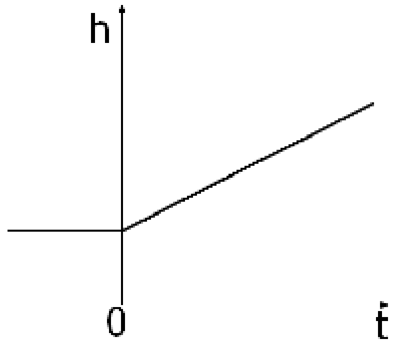


Vyrovnávací nádrž s čerpadlem

Opět provedeme konstrukční změnu u tohoto příkladu. Na výstupní potrubí z nádrže namontujeme čerpadlo, které má funkční závislost $Q_2 = Kn$ kde K je konstanta a n otáčky čerpadla. Množství „Q_2“ je tedy pouze funkcí otáček a nechť množství nezávisí na sací výšce, která se bude měnit v závislosti na „Q_1“. Dojde-li v tomto případě ke změně přítoku „Q_1“ podle obrázku, pak hladina v nádrži začne stoupat, nebo klesat, čerpadlo na změnu hladiny v nádrži reagovat nebude. Je to astatická soustava.



Skoková změna přítoku v čase



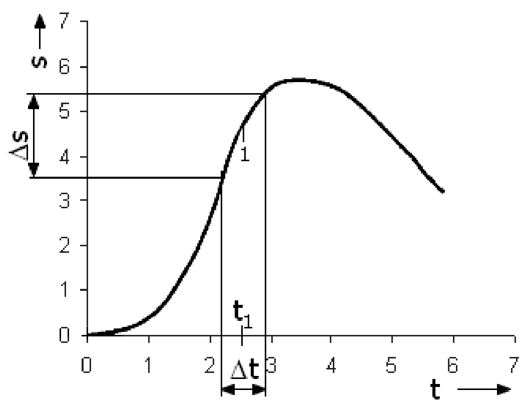
Astatická soustava

2.4. Klasifikace regulačních soustav podle matematického popisu

V regulační technice jsou veškeré dynamické vlastnosti fyzikálních a chemických jevů, dány závislostí různých veličin na čase. Výstupy (regulované veličiny) jsou závislé na časovém průběhu vstupní veličiny, která může být akční nebo poruchová. Závislost vstupní nebo výstupní veličiny na čase můžeme vyjádřit graficky. Zpravidla na vodorovnou osu vynášíme čas a na svislou osu vstupní nebo výstupní veličinu systému. Při určování dynamických vlastností vyšetřujeme přechodové jevy, které jsou závislé na čase. Kromě grafického vyjádření můžeme časovou závislost vyjádřit matematicky rovnicí.

Příklad: Závislost dráhy na čase

Na obrázku je závislost, nerovnoměrného pohybu dráhy na čase s = s(t), znázorněna



Závislost dráhy na čase

křivkou. Ukazuje, jak rychle se měnila vzdálenost v čase od počátku. V libovolném čase pak můžeme z grafu vyjádřit přibližnou velikost okamžité rychlosti. V okolí zvoleného bodu v čase t_1 zvolíme malý přírůstek času Δt a na ose dráhy odečteme

příslušný přírůstek dráhy Δs. Rychlost v čase t_1 odpovídá vztahu $v_1 \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Chyba je tím větší, čím větší je zvolený přírůstek času Δt. Pokud budeme přírůstek postupně zmenšovat například půlením, můžeme dosáhnout stavu, kdy velikost obou přírůstků (času a dráhy) se blíží nule. Takto malý přírůstek nazýváme **diferenciálem**, pro který používáme symbol „*d*“. Potom výpočet rychlosti pomocí diferenciálu

pokládáme za přesný $v_1 = \frac{ds}{dt}$, výraz určuje derivaci dráhy podle času. Fyzikální

podstatou derivace dráhy podle času je okamžitá rychlost. Derivujeme-li dráhu podle času bod po bodu, získáme průběh rychlosti podle času. Je-li přírůstek dráhy v čase nulový, je dráha rovnoběžná s osou času, je derivace nulová a nulová je i rychlost. Funkční závislost rychlosti na čase můžeme stejným postupem opět derivovat a získáme zrychlení z průběhu rychlosti nebo z původní veličiny dráhy.

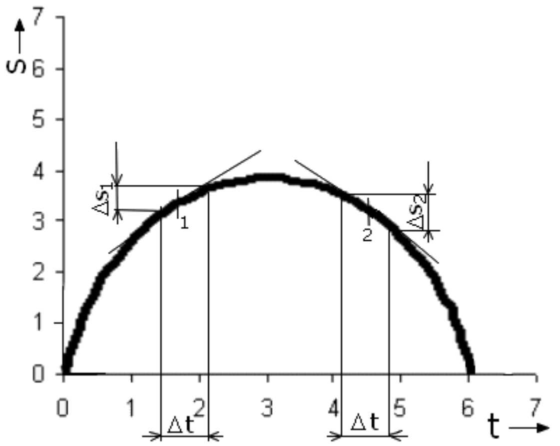
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$$ (čteme: *d* druhé *s* podle *dt* na druhou)

Fyzikální podstatou druhé derivace je tedy zrychlení v určitém čase *t.*
Z předchozího textu je zřejmé, že hodnota derivace funkce je dána strmostí křivky. Stoupá-li křivka, je derivace kladná, nemění-li se v čase (rovnoběžná s osou času), je derivace nulová. Jestliže křivka klesá, je hodnota záporná. Strmost křivky můžeme definovat sklonem tečny, kterou můžeme zkonstruovat v kterémkoli bodě křivky.

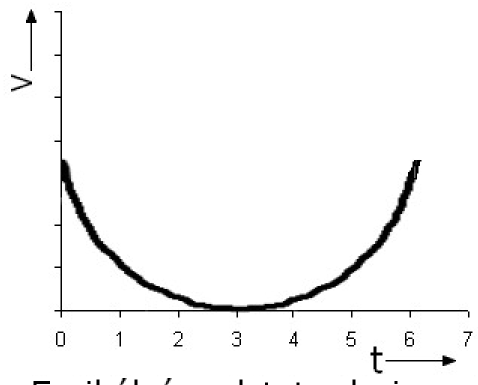
$$\frac{ds(t_1)}{dt} = \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \qquad \frac{ds(t_2)}{dt} = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$$

Tangens úhlu, který je takto definován nazýváme směrnicí tečny. Geometrickým významem derivace v daném bodě křivky je směrnice tečny v tomto bodě. Tímto postupem můžeme provést grafické derivování funkce dráhy a získat průběh rychlosti na čase. Na následujícím obrázku je znázorněný pohyb po dráze v čase *t.* Obrázek může představovat pohyb tělesa, které po určitém čase vrátilo do výchozí polohy.
V nejvzdálenějším místě mnělo nulovou rychlost. Při klasifikaci regulačních soustav vycházíme z jejich dynamických vlastností, které dobře vystihují jejich vlastnosti.
V našem příkladě průběhu dráhy v závislosti na čase není použita derivace, je to

grafický záznam pohybu. Při popisu systému se označuje jako nultá derivace nebo diferenciální rovnice nultého řádu. Rychlost je označována jako diferenciální rovnice prvního řádu a zrychlení diferenciální rovnice druhého řádu.



Strmost křivky je dána směnicí tečen



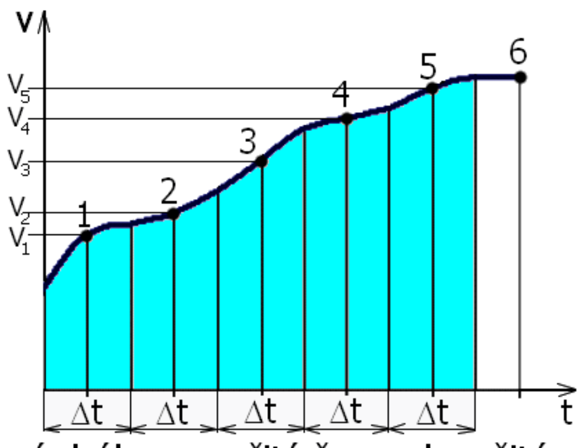
Fyzikální podstata derivace dráhy

Opačnou matematickou operací než derivování je **integrování**. Konkrétně jsme se zabývali rychlostí a drahou. Integrační funkce jako opak derivační funkce nám z průběhu rychlosti umožňuje získat průběh dráhy v čase. Přírůstek dráhy závisí na okamžité rychlosti a přírůstku času. Přibližně platí:

$$\Delta s \approx \mathrm{v}\Delta t$$

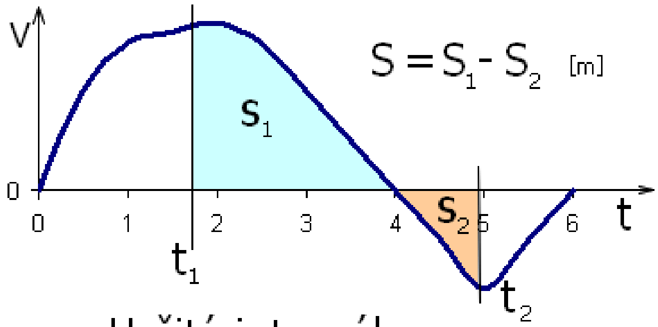
Celková dráha za určitý čas je dána, při nerovnoměrném pohybu, součtem všech přírůstků dráhy. Potřebujeme tedy znát průběh okamžité rychlosti v závislosti na čase. Časovou osu rozdělíme na malé přírůstky Δt od 1 do n a celkovou dráhu jako součet dílčích drah.

$$s \approx \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 ..... + \Delta s_n = \mathrm{v}_1\Delta t + \mathrm{v}_2\Delta t + \mathrm{v}_3\Delta t + ... + \mathrm{v}_\mathrm{n}\Delta t$$



Celková dráha za určitý čas z okamžité rychlosti

Každý součin rychlosti v_i s přírůstkem času Δt (kde *i* nabývá hodnot od *1* do *n*) je reprezentován plochou obdélníku o základně Δt a výšce v_i. Celková dráha je přibližně dána součtem ploch v intervalu od 1 do *n*. Pokud se vyskytne plocha pod časovou osou musíme ji připočítat se záporným znaménkem. Přesnost bude tím větší, čím menší Δt použijeme. Pokud se bude blížit přírůstek času k nule, přechází v diferenciál času ***dt*** a suma součinů je integrál. V našem případě na obrázku je t od 1 do 5, zde jsou označeny meze, odkud a kam je provedena integrace, je to určitý integrál. Jestliže nejsou dány meze integrace pak integrujeme v celém rozsahu pro *t* od $-\infty$ až do $+\infty$, jde o neurčitý integrál. Provedeme-li podle obrázku integraci v rozmezí t_1 až t_2 jde o určitý integrál (t_1 je dolní mez integrace a t_2 je horní mez integrace). Geometrickým významem integrálu



Určitý integrál

časové funkce je součet ploch mezi funkční křivkou a časovou osou, plochy pod časovou osou odečítáme.

2.5. Popis regulované soustavy diferenciální rovnicí

Protože je velká různorodost regulovaných soustav, je potřeba je nějakým způsobem třídit. Pomocí matematického popisu se nechá většina zařadit mezi několik základních typů. Význam tohoto třídění není jen teoretický, ale má i praktický význam. Různé soustavy v různých průmyslových odvětvích, které jsou popsány stejnými rovnicemi, lze řídit stejnými automatizačními prostředky.

Rovnice regulovaných soustav dělíme na dvě velké skupiny:

diferenciální rovnice a) obyčejné (jedna nezávisle proměnná)

b) parciální (více nezávisle proměnných)

ad a) jednou nezávisle proměnnou je čas

ad b) další nezávisle proměnné, které mohou mít nejrůznější fyzikální význam (tlak, objem, napětí atd.).
Například teplota plynu v uzavřeném prostoru (V = konstanta) bude při konstantním přívodu tepelné energie probíhat podle nějaké závislosti v čase. Jestliže nezávisle na tomto čase budeme měnit objem, bude se teplota měnit podle jiné závislosti. Nezávisle proměnná je objem a čas. Regulované soustavy popsané obyčejnými diferenciálními rovnicemi nazýváme soustavy se soustředěnými parametry. Soustavy popsané parciálními diferenciálními rovnicemi nazýváme soustavy s rozloženými parametry.

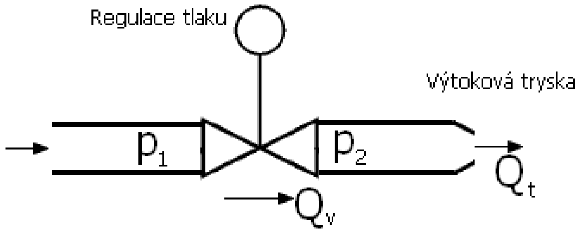
Lineární a nelineární regulované soustavy

Příkladem lineární soustavy je z elektrotechniky ohmův zákon, kde odpor je přímo úměrný napětí a nepřímo proudu a to ve velkém rozsahu. Příkladem nelineární soustavy je vyrovnávací nádrž s ventilem na výstupu kde $Q_2 = Kz\sqrt{h}$ a nebo úloha s odstředivými čerpadly. Zde je množství tekutiny dodávané čerpadly nelineárně závislé na změně hladiny *h*. Při malých změnách hladiny a dodávaného množství Q je možné příslušné křivky po úsecích nahradit přímkami. Pak je možné po částech pracovat s takovouto soustavou jako s lineární. Přísně vzato lineární regulované soustavy vlastně neexistují a záleží vždy na problému, který řešíme, zda je linearizace přípustná.
Lineární regulované soustavy třídíme podle řádu derivace a mají propracovanou jednotnou metodiku řešení. Tuto výhodu nemají diferenciální rovnice nelineární.
Zvláštní třídu regulovaných soustav tvoří soustavy s dopravním zpožděním. U nich se účinek akční veličiny projevuje až po uplynutí určité doby. Příkladem nechť je dopravní pás, kde změna dopravovaného materiálu na počátku pásu se projeví na konci za dobu, která je potřeba na dopravu mezi vstupem a výstupem z pásu. Dopravní zpoždění se vyskytuje u soustav libovolného typu. Je způsobeno konečnou rychlostí šíření signálu v soustavě. Může to být ale i například analýza chemického složení paliva, které ovlivňuje výhřevnost a tedy výkon, a která trvá určitou dobu a se s pożděním vstupuje do soustavy. Proto se u uhelných elektráren přesypává uhlí z hromady na hromadu, aby se výhřevnost co nejvíce homogenizovala a nedocházelo

k velkým výkyvům výhřevnosti. Přesto se výhřevnost uhlí měří na dopravním pásu, který dopravuje uhlí do elektrárny. Zpoždění na řízení soustavy pak působí nepříznivě.

2.5.1. Soustavy nultého řádu

Jako příklad použijeme regulaci tlaku *p* v potrubí před výtokovou tryskou. Regulace se provádí změnou průtoku v regulačním ventilu. Je-li potrubí mezi ventilem a tryskou



Soustava nultého řádu

krátké, mění se tlak před tryskou okamžitě s přestavením ventilu. Průtočné množství protékající ventilem můžeme popsat rovnicí za předpokladu, že hustota a teplota je konstantní.

$$Q_v = zk_1\sqrt{p_1 - p_2}$$

k_1 – konstanta úměrnosti reprezentuje například konstrukci kuželky, hustotu protékající látky, ztrátu třením a konstantu z kinetické energie.

z – zdvih ventilu

p_1, p_2 tlak před ventilem a za ventilem, tlak p_2 je přetlakem k tlaku okolí do kterého tekutina vytéká. Obdobně můžeme popsat průtočné množství protékající tryskou.

$$Q_t = k_2\sqrt{p_2}$$

k_2 – konstanta úměrnosti

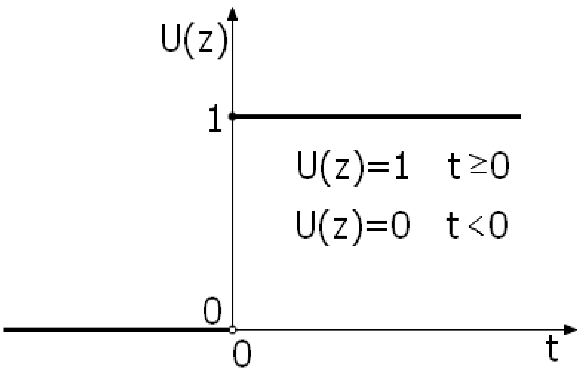
Jestliže platí $Q_t = Q_v$ pak úpravou předchozích rovnic získáme

$$\frac{p_2}{p_1 - p_2} = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 z^2$$

To je nelineární vztah, který je možné pro malé změny zdvihu ventilu kolem některé polohy linearizovat. Za určitých podmínek (například zanedbáme vůli v mechanizmech) můžeme za soustavy nultého řádu považovat pákové převody, ozubené převody atd. Tyto soustavy reagují okamžitě na změnu akční veličiny, nemají časové zpoždění. Rovněž odezva na poruchy bývá bez zpoždění, takže regulátor s akčním členem, který má určitá zpoždění (dáno dynamikou), nestačí poruchu rychle odstranit. Pokud zpoždění regulačního obvodu bude velké, dochází k nestabilní regulaci, nebo i situaci, že regulační obvod bude zesilovat vstupující poruchu. Regulace soustavy nultého řádu vyžaduje tedy přísnější požadavky na rychlost regulačního zásahu.

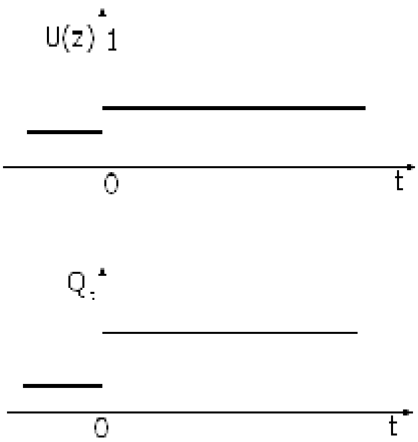
2.5.2. Přechodová charakteristika

Dynamické vlastnosti soustavy názorně ukazuje přechodová charakteristika. Je definována jako odezva na jednotkový skok budící funkce. Pro náš příklad soustavy



Jednotkový skok budící funkce

nultého řádu to znamená, že v čase nula z polohy zavřeno z = 0 se přesuneme v nekonečně krátkém čase do polohy plně otevřeno z = 1. To je ale technicky nemožné.

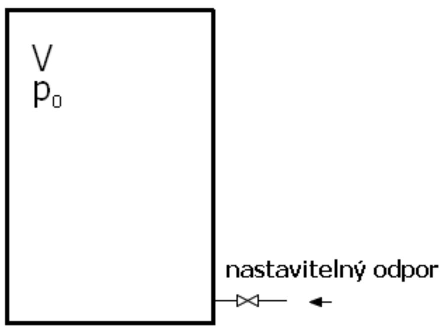


Dynamika soustavy nultého řádu

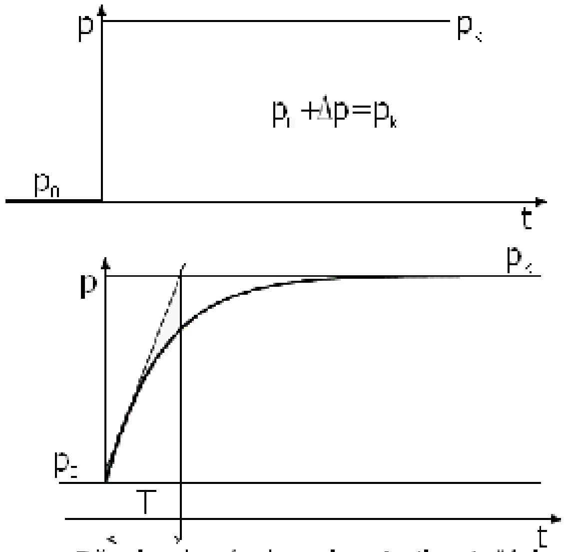
V praxi se používá technicky i provozně možný skokový vstupní signál, který se přepočítává na jednotkový skok. Odezvu na budící signál sledujeme v průběhu času na výstupu ze soustavy a pro vzájemné porovnání se opět výstup upravuje (u lineárních soustav) podle jednotkového skoku. Přechodová charakteristika soustav nultého řádu nemá dynamiku a změna vstupní veličiny se okamžitě projeví na výstupu.

2.5.3. Soustavy prvního řádu – statické

Příkladem takovéto soustavy může být tlaková nádoba, ve které se akumuluje stlačený plyn, nebo to může být dlouhé plynové potrubí, tedy jsou to zařízení, které akumulují energii z oblasti mechaniky tekutin. Podobné příklady najdeme v mechanice tuhých těles nebo i elektrotechnice. Představme si tedy tlakovou nádobu na vzduch, která má konstantní objem V a je v ní počáteční tlak p_0 a teplota se během pokusu nebude měnit. Platí, že čím je větší objem nádoby a tlak, tím více energie jsme schopni akumulovat. Na vstupu do nádoby může být nastavitelný odpor (ventil), kterým můžeme měnit rychlost plnění nebo vyprazdňování nádoby. Na



Tlaková nádoba



Přechodová charakteristika 1 řádu

počátku je soustava v rovnováze, v potrubí i v tlakové nádobě je stejný tlak. Změní-li se v potrubí tlak skokem na jinou hodnotu, začne se tlaková nádoba naplňovat na stejný tlak jako je v potrubí. Pokud budeme tento děj sledovat a zaznamenávat v čase získáme graf v podobě exponenciální funkce. Tato funkce je obecně řešením diferenciální rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty.

Matematický popis

Označme $\frac{dy}{dt} = y'$ obecně $a_1 y' + a_0 y = bu$ a_1, a_0, b jsou konstanty.

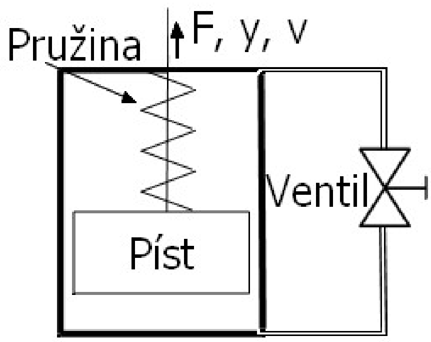
Podíl konstant $\frac{a_1}{a_0}$ má rozměr času a nazývá se časovou konstantou „T“ soustavy.

Řešení diferenciální rovnice prvního řádu je $p_k(t) = \Delta p\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) + p_0$

V případě že $t = T$, je výraz v závorce roven hodnotě 0,632. To znamená, že probíhající změna má hodnotu 63,2% konečné hodnoty. Po uplynutí dostatečně dlouhé doby se veličina ustálí na nové hodnotě. Tato doba může být teoreticky i nekonečně dlouhá. Prakticky je měření zatíženo nepřesnostmi rozlišovacích možností snímačů a rušivými signály, tak že pokud matematická funkce má konečnou hodnotu v nekonečnu, nedokážeme tuto skutečnost změřit ani po uplynutí určitého času. Většinou tak malé rozdíly ve výstupních hodnotách jsou nepodstatné pro technická řešení. Obecně je nová ustálená hodnota vyjádřena po dostatečně dlouhém čase z konstanty $t = 5T$. Výraz v závorce pak má hodnotu 0,993, tedy nová hodnota je určena na 99,3%.

Tlumič s pružinou

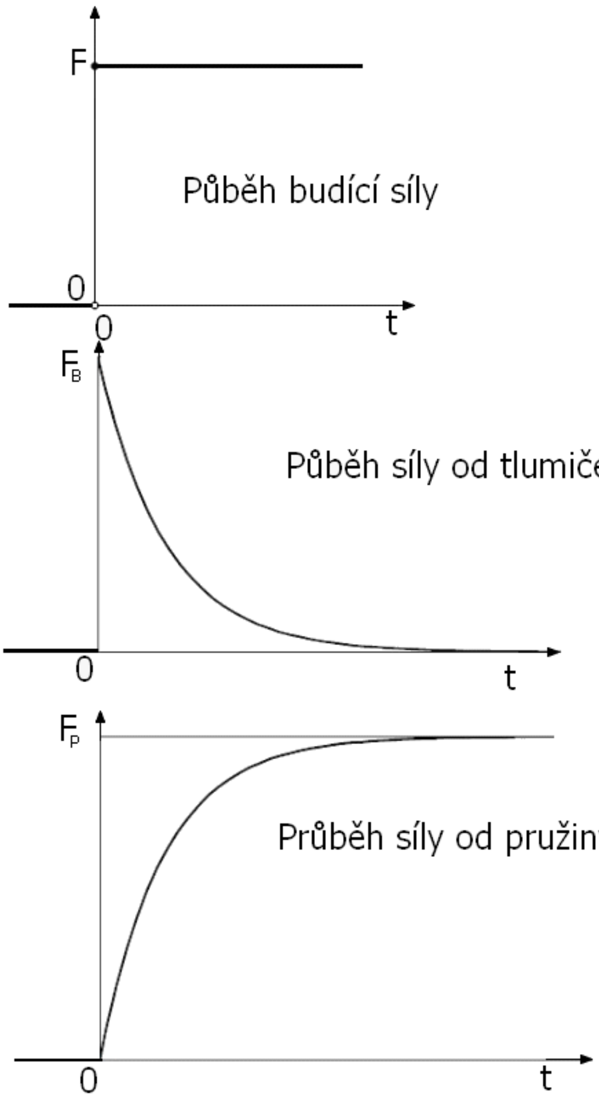
Představme si tlumič s pružinou a zanedbejme jejich hmotnost. Pružina má lineární charakter a tlumič může být konstrukčně řešen jako hydraulický píst, kde krajní polohy



Tlumič s pružinou

pístu jsou propojeny potrubím s hydraulickým odporem (ventil). Tlumič mění linearitu soustavy na exponenciální funkci. Stlačení pružiny y vyvozuje sílu pružiny $F_p = Cy$, kde C je konstanta tuhosti pružiny. Síla tlumiče závisí od rychlosti „v“ s jakou se pohybuje píst a na nastavené konstantě tlumení B, tedy na ventilu a jeho pracovní poloze. Předpokládejme, že potrubí nemá vliv na konstantu tlumení. Sílu od tlumiče potom popíšeme pomocí rovnice $F_B = B\frac{dy}{dt} = By'$, kde F_B je brzdící síla tlumiče, y je drána táhla pístnice, F je budící síla soustavy. Pokud bychom chtěli uvažovat hmotnost soustavy, pak ve spojení se zrychlením získáme diferenciální rovnici druhého řádu.

$F_p + F_B = F$ v našem případě když změna polohy je nulová tak i rychlost změny polohy

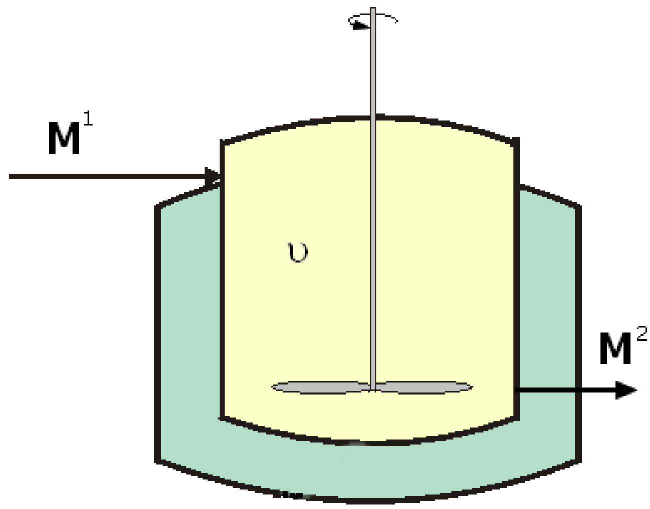


Rovnováha sil

je nulová a síla je nulová. Pokud je soustava v pohybu je část síly působící na soustavu eliminována tlumičem (nenulová rychlost) a část stlačením pružiny. Čas přechodového děje stlačení pružiny je dán nastavením odporu tlumiče a u mechanizmů se může pohybovat okolo jedné sekundy, někdy více jindy méně. Z obecné diferenciální rovnice $a_1 y' + a_0 y = bu$, která popisuje naše zadání a časové konstanty $\frac{a_1}{a_0}$, kde a_1 je naše konstanta tlumiče B a a_0 konstanta pružiny, jasně ukazuje, že čím větší bude odpor tlumiče, tím větší bude časová konstanta soustavy a přechod do nové polohy bude trvat delší dobu.

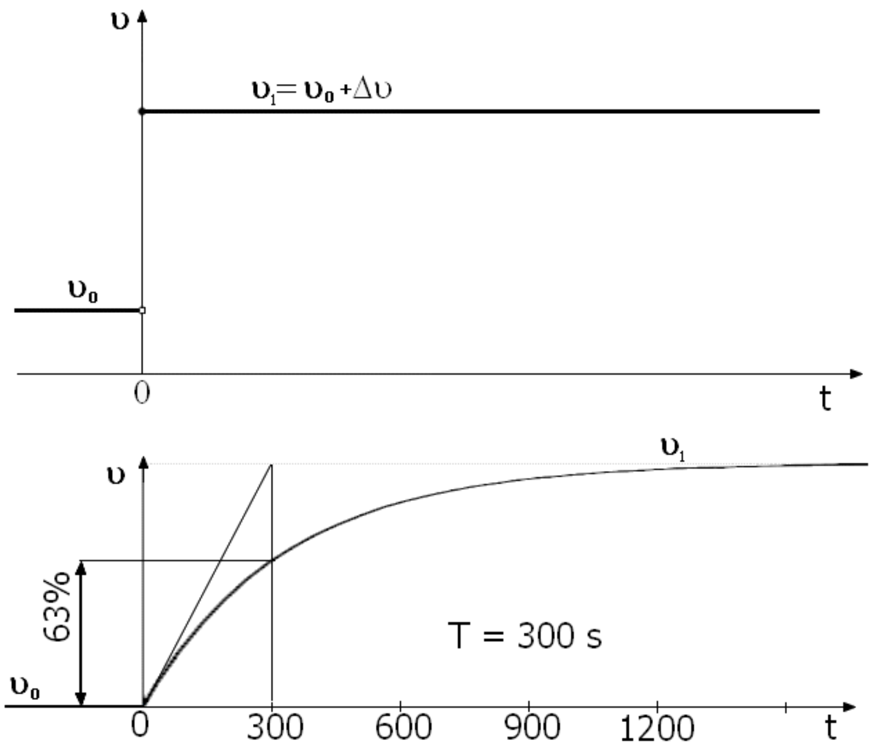
Příklad průtočné nádrže

Mějme tepelně izolovanou průtočnou nádrž zaplněnou kapalinou o teplotě υ_0 a



Průtočná nádrž

množství přitékající tekutiny M^1 je rovno množství odtékající tekutiny M^2. Obsah nádrže je promícháván tak intenzivně, že teplota uvnitř nádrže je všude stejná. Dojde-li k náhlé změně teploty přitékající kapaliny do nádrže, bude se teplota v nádrži postupně

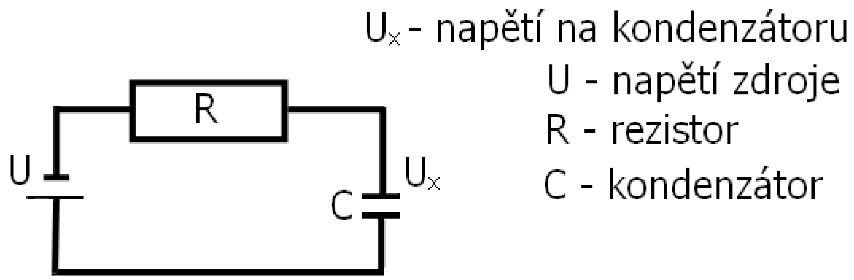


Přechodová charakteristika

měnit $\upsilon_1 = \upsilon_0 + \Delta\upsilon$. Nádrž tedy vyrovnává teplotní výkyvy protékající tekutiny a bude určitě záležet na kapacitě zvolené nádoby a na průtoku tekutiny. Tepelné technice jsou obecně časové konstanty dynamických pochodů velké, zvláště týká-li se to ohřevu vody, výroby páry atd.

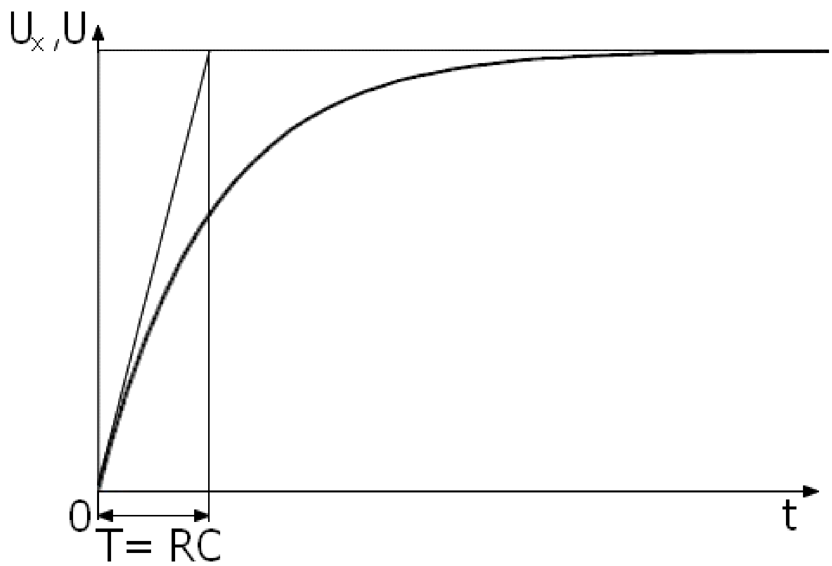
Příklad elektrické soustavy

Jednoduchá elektrická soustava s odporem a kondenzátorem. Předpokládáme, že



Elektrická soustava s RC členy

nejdříve v celém okruhu RC je nulové napětí. Změníme-li skokem napětí na zdroji, vzroste napětí na kondenzátoru po exponenciále. Časová konstanta soustavy je dána součinem odporu a kapacity a ustálená hodnota napětí na kondenzátoru U_x je rovna napětí na zdroji U. Matematické řešení soustavy je $U_x = U\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$



Průběh napětí na RC okruhu

Zobecnění

Diferenciální rovnici 1 řádu lze popsat obecně rovnicí

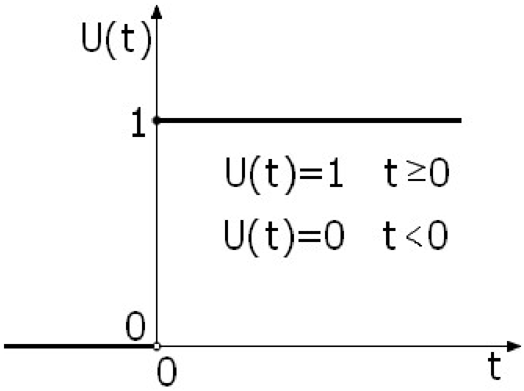
$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

kterou upravíme do normovaného tvaru

$$\frac{a_1}{a_0} y'(t) + y(t) = \frac{b_0}{a_0} u(t) \quad K = \frac{b_0}{a_0}; \quad T = \frac{a_1}{a_0}$$

$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t) \quad kde \ y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

Jestliže v počátku pro *t=0*; je funkce *y(0)=0* a budící funkce *u* je dána grafem



pak řešením je rovnice

$$y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

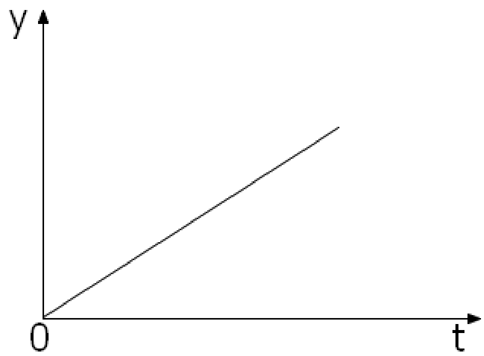
prostým dosazením do rovnice za čas *t* zjistíme, že po určité době je pro řešení určující konstanta *K.* Tato konstanta představuje zesílení soustavy, tedy je to informace, jak se projeví vstupní signál na výstupu ze soustavy po skončení dynamických dějů. Praktické ustálení výstupní veličiny se považuje pětinásobek časové konstanty *t=5T* .

2.5.4. Astatické soustavy I řádu

Příkladem v mechanice je samostatný tlumič bez pružiny. Takovouto soustavu můžeme popsat rovnicí v obecném tvaru

$a_1 y'(t) = b_0 u(t) \ \ pro \ \ a_0 = 0$, v rovnici není člen, který popisuje chování pružiny. Řešením je $y(t) = \frac{b_0}{a_1} t$ což je rovnice přímky, kde maximální hodnota zdvihu *y* je dána konstrukcí tlumiče. Po dosažení meze táhla tlumiče se pohyb zastaví.

V pracovním zdvihu nikdy nedojde k zastavení v nové pracovní poloze, soustava není statická, je astatická.



Astatická soustava 1 řádu

Příklad uzavřené vyrovnávací nádrže u odstředivého čerpadla.
Na počátku této kapitoly jsme diskutovali otevřenou nádrž, kde protitlak podávacího čerpadla byl přímo dán výškou hladiny *h*. V případě, že je nádoba uzavřena, je protitlak dán přetlakem v nádobě. Je-li tlak nádobě například 5 barů (to představuje tlak vodního sloupce o výšce 50 metrů), pak změna výšky v uzavřené nádobě (řádově maximálně metry) je zanedbatelná a neovlivní množství napájecí vody dodávané čerpadlem. Proto při jakékoliv změně potřeby napájecí vody nedojde ustálení hladiny a hladina neustále klesá nebo stoupá. Soustava je astatická.

2.5.5. Soustavy druhého řádu

Všechny přechodové charakteristiky soustav druhého a vyšších řádů začínají nulovou rychlostí změny regulované veličiny *y*. Směrnice tečny ke křivce přechodové charakteristiky je v počátku nulová na rozdíl od soustav prvního řádu, kde byla konečná. Všechny přechodové charakteristiky soustav druhého řádu mají parabolický náběh v krátkém časovém úseku na začátku přechodové charakteristiky.
Obecný popis diferenciální rovnicí

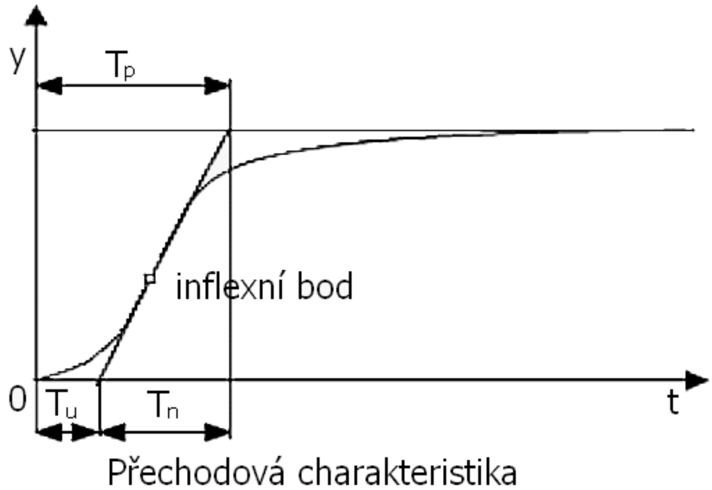
$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t)$$

uvažujme dále, že v čase nula je výchozí bod i rychlost nula $y'(0) = 0 \quad y(0) = 0$

Rovnici upravíme do tvaru

$$T^2 y''(t) + 2Txy'(t) + y(t) = Ku(t) \qquad K = \frac{b_0}{a_0} \qquad \frac{a_1}{a_0} = 2Tx \qquad \frac{a_2}{a_0} = T^2$$

ξ – představuje součinitel tlumení, pokud jeho hodnota je ≥ 1pak rovnice popisuje soustavu s aperiodickým dějem (to znamená, že přechod probíhá po křivce bez



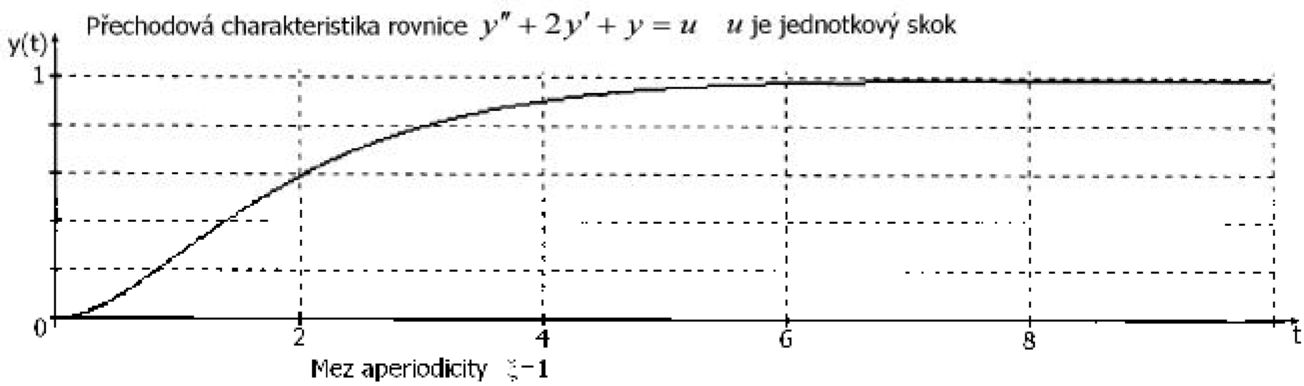
kolísání). Přechodová charakteristika pro soustavy druhého a vyšších řádů obsahuje inflexní bod, (to je místo kde křivka přechází z konvexní na konkávní průběh). Při tom se vychází z toho, že přechodová charakteristika statických systémů vyššího než prvního řádu je v okolí inflexního bodu téměř přímková a určení tečny v tomto bodě přechodové charakteristiky je poměrně přesné. V tomto místě proložená tečna vytíná na ose času časové intervaly označené T_u a T_n a na průsečíku s osou asymptoty T_p .

T_u – doba průtahu

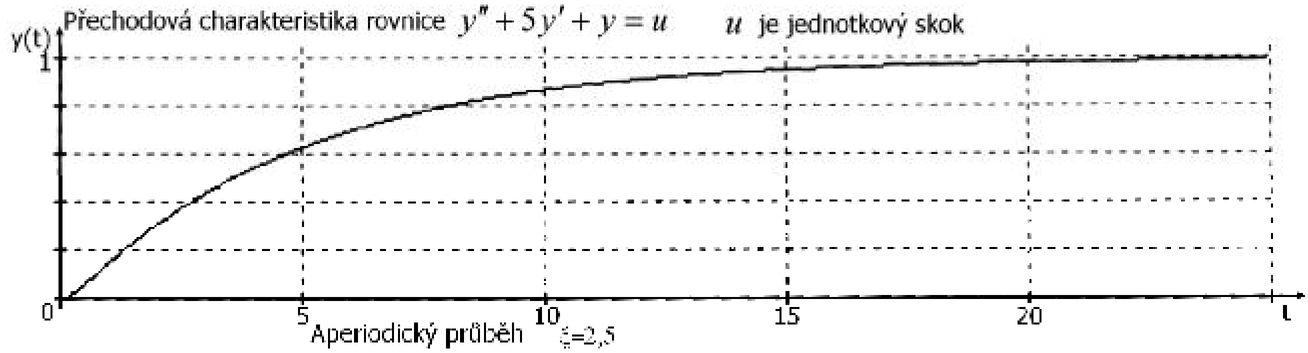
T_n – doba náběhu

T_p –doba přechodu

Tyto hodnoty slouží k vyhodnocování soustav na základě měření přechodových charakteristik z grafického zápisu. Přesné určení dynamických vlastností je ale nemožné. Vyhodnocování přechodové charakteristiky se zpravidla spojuje s aproximací



skutečného systému náhradním systémem, u něhož je známá struktura.



Porovnáme-li řešení rovnic, které popisují nějaké dynamické systémy jeden na mezi periodicity druhý aperiodický, tvarově se zdají být podobné. Je ale třeba věnovat pozornost časové ose, kde aperiodický systém potřebuje na docílení ustálené hodnoty *y* více jak dvojnásobek času než systém na mezi aperiodicity.

Pro dané zadání můžeme v tomto případě pohlížet na diferenciální rovnici jako na kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0 \quad a = T^2 \quad b = 2Tx \quad c = 1$

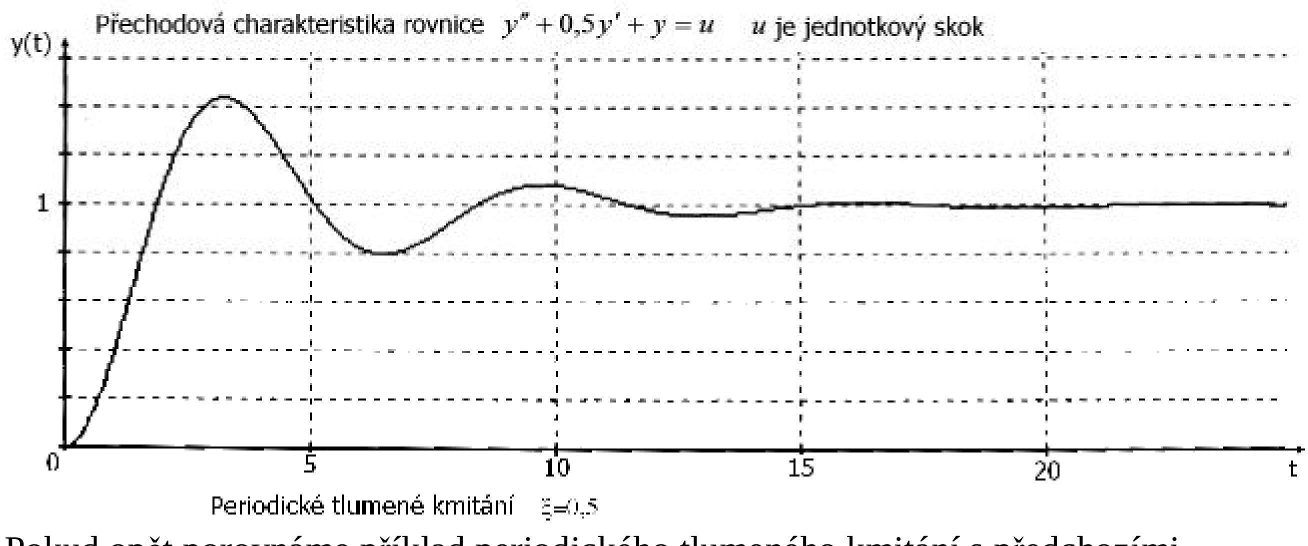
Kořeny této kvadratické rovnice $p_{12} = \dfrac{-2Tx \pm \sqrt{4T^2x^2 - 4T^2}}{2T^2} = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 - 1}}{T}$

Diskriminant $D = x^2 - 1$

pro $\xi > 1$ je $D > 0$ průběh je aperiodický

pro $\xi < 1$ je $D < 0$ průběh je periodický

pro $\xi = 1$ je $D = 0$ průběh je na mezi periodicity



Pokud opět porovnáme příklad periodického tlumeného kmitání s předchozími dynamickými systémy, zjistíme, že konečné hodnoty *y=1* docílíme za méně jak 5 sekund, ale s následným tlumeným kmitáním kolem této hodnoty a to i po 20 sekundách.

Pokud kořeny kvadratické rovnice jsou reálná čísla D $\geq$0, pak diferenciální rovnice 2 řádu má obecně řešení $y(t) = C_1 e^{p_1 t} + +C_2 e^{p_2 t} + K \quad pro\ u(t) = 1\ (t \geq 0)$

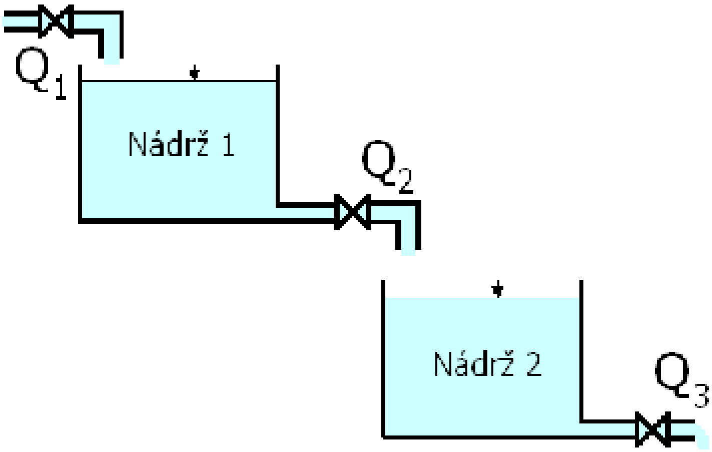
K je zesílení soustavy.

Příklady soustav druhého řádu

Soustavu druhého řádu můžeme vytvořit zapojením dvou soustav prvního řádu do série. Mohou to být dvě tlakové nádoby na plyn, nebo nádrže na tekutinu, nebo velmi dlouhé potrubí s tlakovou nádobou apod.

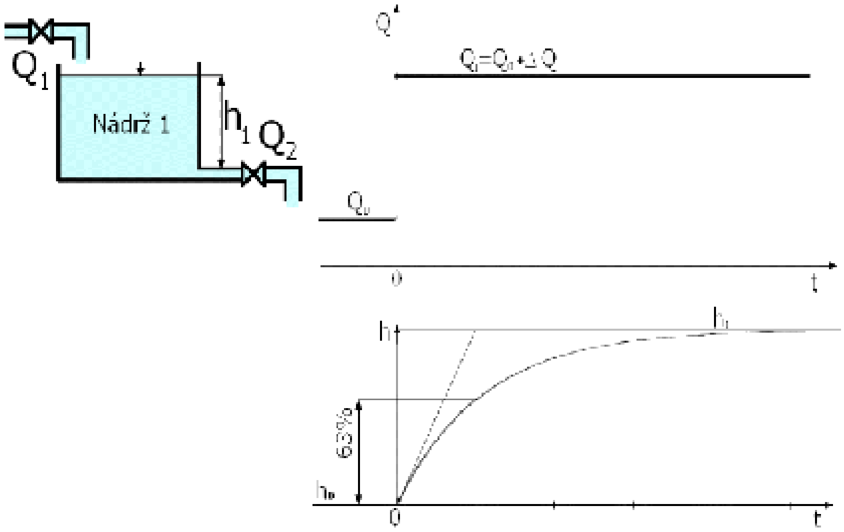
Příklad dvou nádrží

Nádrže mohou být zapojeny bez vzájemného ovlivňování. Fungují tak že, zvýšení



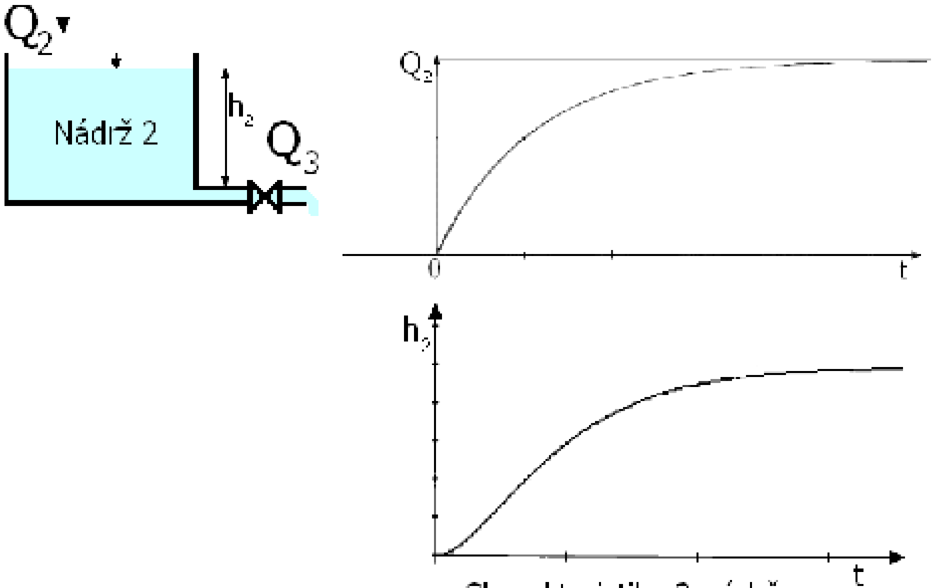
Nádrže bez vzájemného ovlivňování

hladiny v nádrži 2 nemá vliv na výtok z nádrže 1. Výtok z první nádrže závisí na přítoku Q_1 na výšce hladiny nádrže 1 a nastavení ventilu na výtoku. Předpokládáme, že se nemění hustota a teplota tekutiny.



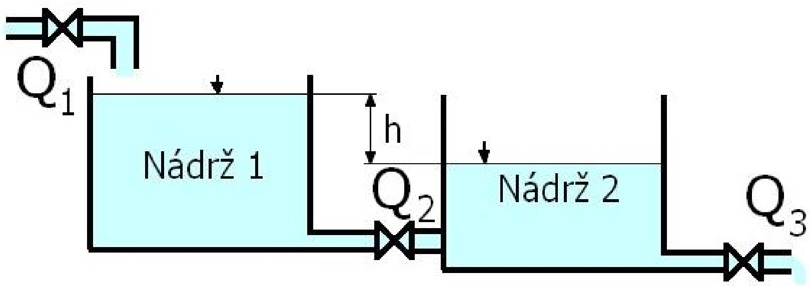
Přechodová charakteristika nádrž 1

Množství vytékající tekutiny Q_2 závisí na výšce hladiny v nádrži h_1 průtočném průřezu ventilu A. Konstanta ζ představuje bezrozměrné číslo, které vyjadřuje hydraulický odpor (výtokový součinitel). $Q_2 = zA\sqrt{2gh_1}$. Bude-li se měnit výška h_1 v závislosti na ní se bude měnit vytékající množství Q_2. Závislost je nelineární, což je dáno druhou odmocninou. Protože ve vztahu uvažujeme, že se nebude měnit A, ζ, g bude změna Q_2 mít tvar jako h_1.



Charakteristika 2 nádrže

V případě vzájemného ovlivňování upravíme nádrže tak, že je umístíme například vedle sebe a spojíme potrubím. V tomto případě bude rozdíl výšek hladin 1 a 2 nádrže ovlivňovat množství Q_2 protékající spojovacím potrubím. Spojovací potrubí musí být pod hladinou, ale je jedno v jaké hloubce, nezáleží na poloze spojení nádrží. Dojde-li



Zapojení nádrží; vzájemné ovlivňování

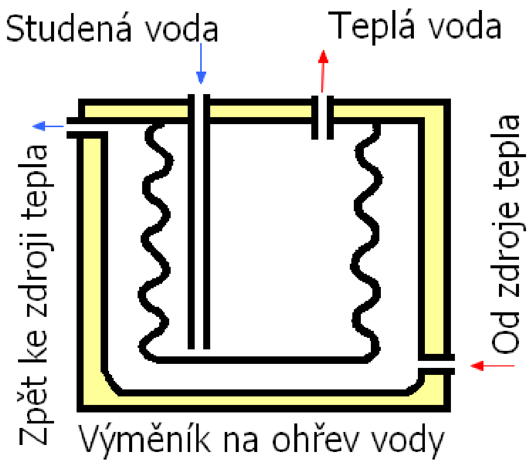
například ke snížení průtoku Q_3 a ostatní hodnoty zůstanou nezměněny, dojde k postupnému zvyšování hladiny 2 nádrže, snižování rozdílu výšek hladin h. To vyvolá zvyšování hladiny 1 nádrže. V tomto případě říkáme, že se jedná o dva členy popsané diferenciální rovnicí 1 řádu zapojené v sérii se vzájemným ovlivněním neboli s interakcí. Mezi soustavami existuje vnitřní zpětná vazba.

U zapojení bez vzájemného ovlivnění se zvýší pouze hladina v 2 nádrži. Výstupní signál (průtočné množství Q_2) z první nádrže se šíří pouze jedním směrem, jedná se o zapojení soustav 1 řádu bez vzájemného ovlivnění.

Tyto úlohy je možné považovat za lineární jen v malém rozsahu změny výšek hladiny. Obecně se jedná o úlohy nelineární.

Příklad průtočného výměníku na teplou vodu.

Jedná se o tlakovou nádobu odizolovanou od okolí, ve které je umístěna druhá nádoba nerezový vlnovec, který volně dilatuje podle měnící se teploty. Tímto pohybem se zbavuje vodního kamene. Budeme předpokládat, že v nádobách dochází k dokonalému promíchávání vody, tak že teplota se mění postupně v celém objemu. Při zachování protékajícího konstantního množství vody první i druhou nádobou se změní jen teplota na vstupu (kotle začnou nahřívat vodu). V první nádrži bude teplota postupně růst



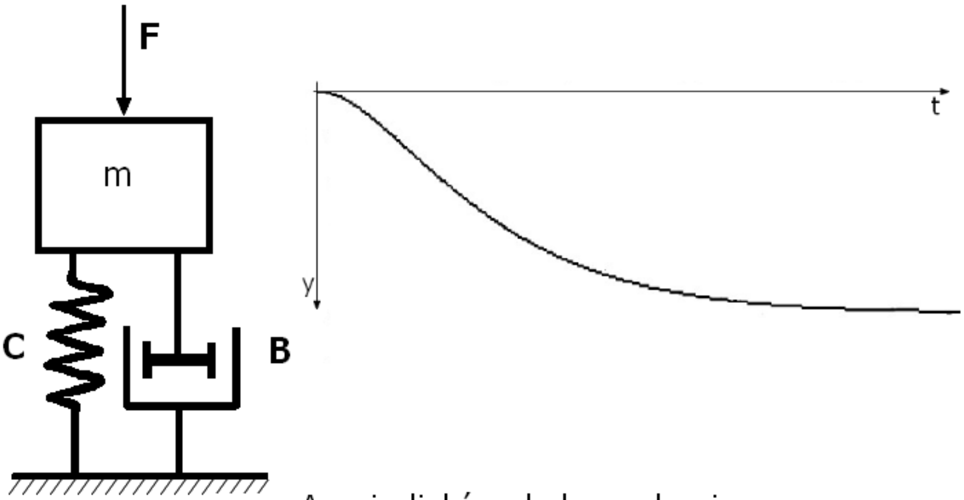
(soustava 1 řádu) a bude ohřívat vodu v druhé nádrži (nerezový vlnovec), soustava druhého řádu.

Příklad mechanismu

Mějme soustavu tvořenou válcovou pružinou, tlumičem a hmotností tělesa, které spojuje mechanismus s pevnou podložkou. Jestliže se mechanismus bude pohybovat

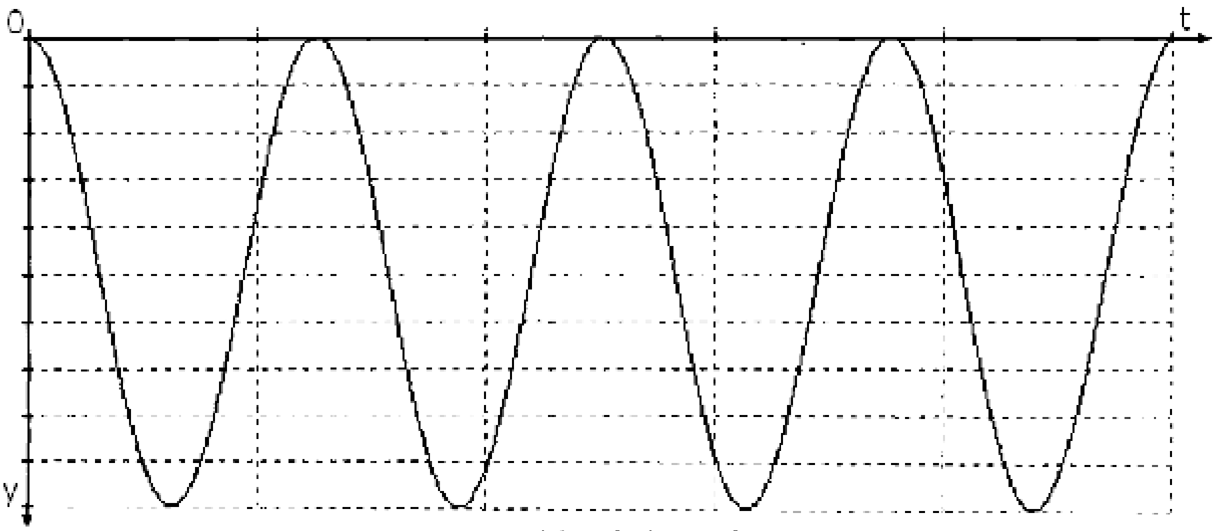
$$F_p = Cy \qquad F_B = By' \qquad F_m = m\frac{d^2y}{dt^2} = my''$$

a má určitou hmotnost, budou na něj působit setrvačné síly F_m od zrychlení (derivace rychlosti podle času). Vlastní hmotnost mechanismu si můžeme představit jako odpruženou sedačku. Předpokládejme, že hmotnost sedačky *m* je soustředěna do těžiště, ve kterém působí i všechny uvažované síly. Pak položíme-li na sedačku nějaké těleso (zatížíme ji silou v podobě skokové funkce *F*) získáme odezvu této soustavy v podobě přechodové funkce druhého řádu. $Cy + By' + my'' = F$



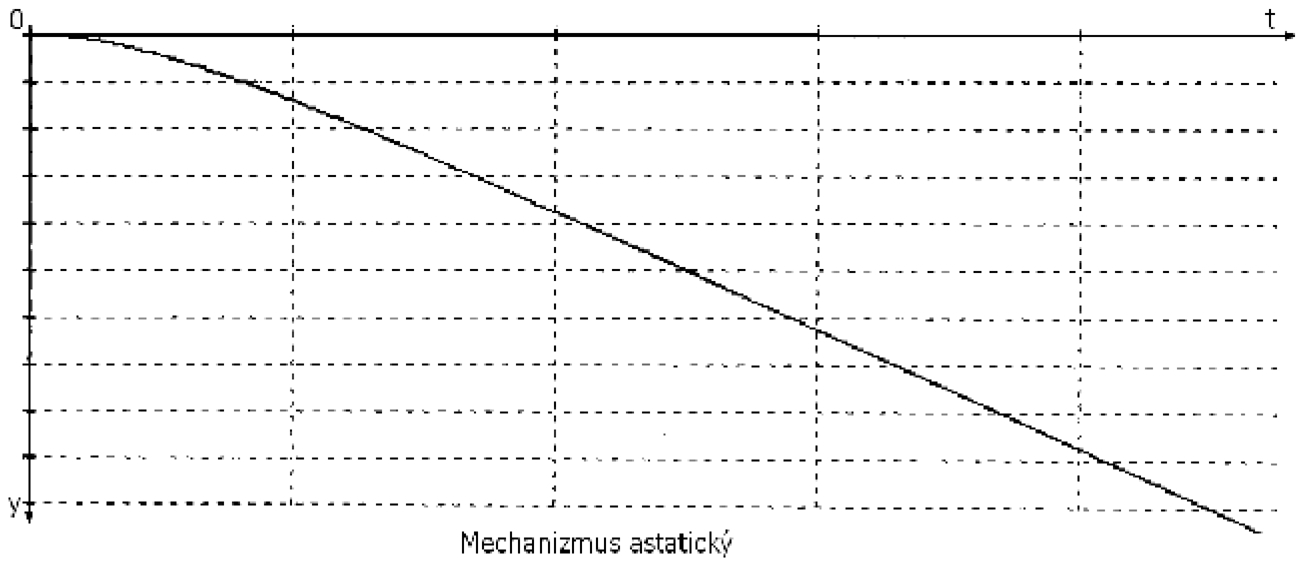
Aperiodický pohyb mechanismu

Pokud snížíme konstantu tlumení B, dojde k tomu, že se mechanizmu při přechodu do nové polohy začne pohupovat (harmonické tlumené kmity). Tlumič obecně představuje i ztráty energie třením. Pokud vyřadíme z mechanizmu tlumič a necháme zapojenou jen pružinu a hmotnost, pak výsledkem jsou harmonické kmity. $Cy + my'' = F$



Harmonický pohyb mechanismu

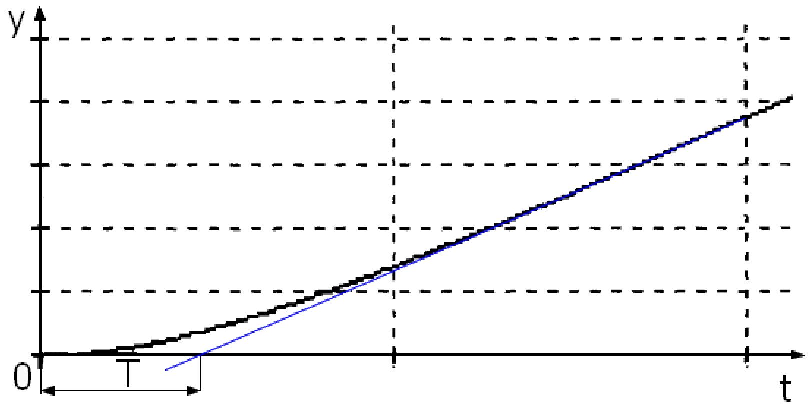
Poslední variantou je vyřazení pružiny z mechanizmu. Získáme průběh charakteristický pro astatické soustavy druhého řádu. $By' + my'' = F$



Mechanizmus astatický

2.5.6. Astatické soustavy druhého řádu

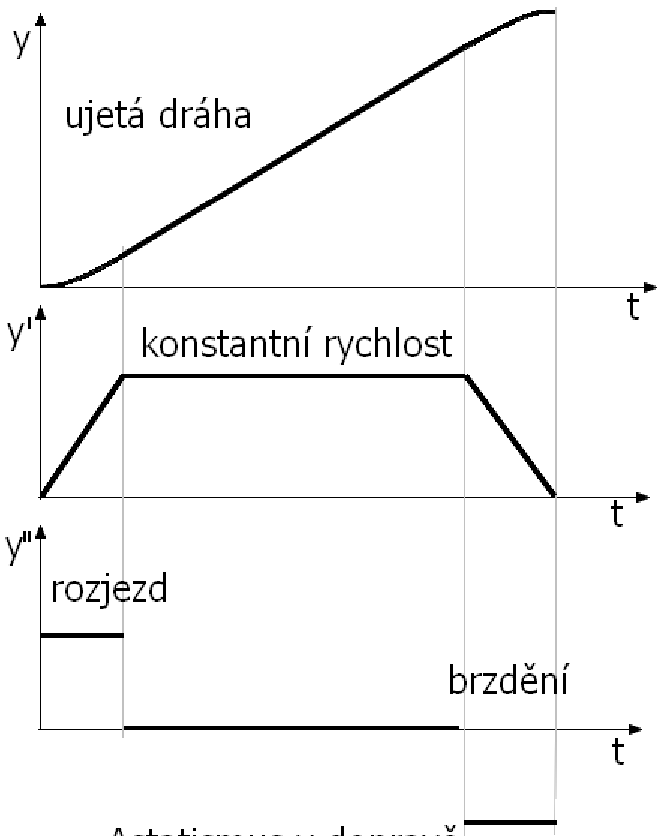
Přechodová charakteristika se asymptoticky blíží přímce, která na časové ose vytíná časový úsek označovaný T.



Astatismus druhého řádu

Příkladem je v energetice parní generátor (buben) u parního kotle. Je to tlaková nádoba, která funguje jako uzavřená vyrovnávací nádrž, ve které se udržuje v předepsaných mezích výška vody (změna výšky hladiny v podobě statického tlaku, má v bubnu pro regulaci zanedbatelnou hodnotu). Z prostoru ohniště kotle se přivádí směs vody a páry. V této nádobě se odlučuje voda od páry a ta se odvádí k dalšímu ohřevu do parního přehříváku. Za odvedenou páru je třeba doplňovat do kotle vodu napájecím čerpadlem. I když je voda pro doplňování předehřívána má nižší teplotu než směs páry a vody z ohniště a to způsobuje ochlazování v bubnu. Výška hladiny vody neroste při rostoucích změnách výkonu soustavy lineárně oproti dodávanému množství vody.

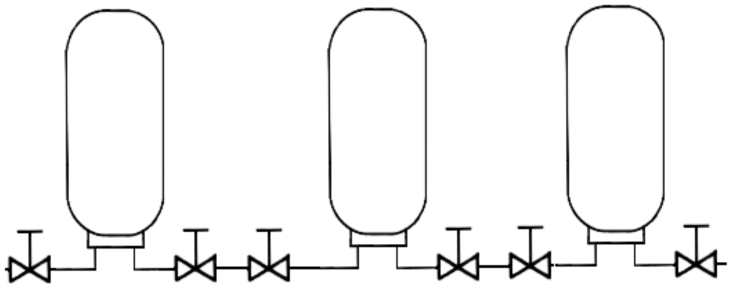
Příklad z městské hromadné dopravy, kde kolejové vozidlo (tramvaj) nesmí překročit z bezpečnostních důvodů určité zrychlení. Na rovinné trati pak může mezi zastávkami vypadat průběh dráhy rychlosti a zrychlení podle obrázku.



Astatismus v dopravě

2.5.7. Soustavy vyšších řádů

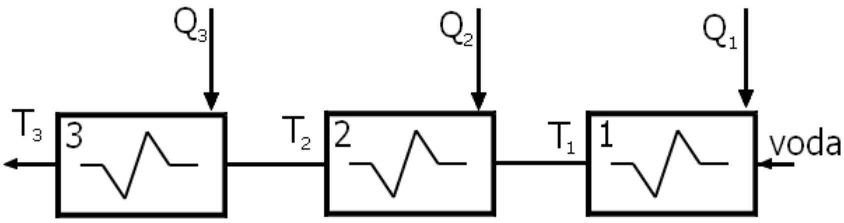
Soustavy vyšších řádů mohou vzniknout zapojením více soustav nižších řádů. Například již zmíněná tlaková nádoba na vzduch se sama chová jako soustava prvního řádu. Chceme-li zvýšit kapacitu zásoby stlačeného vzduchu a zapojíme-li v sérii další



Sériové zapojení tří tlakových nádob

dvě tlakové nádoby, budou se chovat jako soustava třetího řádu. Přidáme-li jen jednu, budou se chovat jako soustava druhého řádu.

V energetickém závodě, například elektrárně se ohřívá voda před vstupem do kotle kondenzující parou a to postupně ve více stupních za sebou v sériovém zapojení. Řád každého výměníku závisí na konstrukci. Předpokládejme, že máme tři výměníky a každý lze popsat diferenciální rovnicí druhého řádu. V sériovém zapojení se zpětně neovlivňují (při změně teploty vody na vstupu nebo při změně průtoku). Při změně teploty na vstupu do prvního výměníku se s časovým zpožděním začne měnit teplota na výstupu prvního výměníku. Ta je vstupem do druhého výměníku a s dalším zpožděním je vstupem do třetího výměníku. Takovéto zapojení se chová jako soustava šestého řádu. Při změně průtočného množství je situace jiná, protože působí změna průtoku současně ve všech stupních bez časového zpoždění, ovšem změna teploty má složitější strukturu a nechová se jako soustava nultého řádu.



Sériové zapojení výměníků

2.5.8. Literatura

[1] Balátě J.: Automatické řízení, 2004 Praha, ISBN80-7300-148-9